Uyarı

$1° = 60^{I}$ ve $1^{I} = 60^{II}$

AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ :

1) Derece : Bir çember yayının $\frac{1}{360}$ ine 1 derecelik yay ve bu yayı gören merkez açının ölçüsüne de 1 derecelik açı denir. Bir derecelik açı 1° ile gösterilir. Bir derecenin $\frac{1}{60}$ ine 1 dakika, 1 dakikanın $\frac{1}{60}$ ine de 1 saniye denir.

1 dakika 1^{I} ile

1 saniye 1^{II} ile gösterilir.

Uyarı

$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ veya

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ dir.

2) Radyan : Bir çemberin yarıçap uzunluğundaki yayına bir radyanlık yay ve bu yayı gören merkez açıya bir radyanlık açı denir.

Bir çemberin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan, bu çemberde r uzunluğundaki yaylardan $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ kadar var demektir. O halde bir çemberin tamamını gören merkez açının ölçüsü 2π radyandır.

Örnek:

197293 saniyelik açı kaç derece, kaç dakika, kaç saniyedir?

Çözüm:

$1° = 60^{I}$

$1^{I} = 60^{II}$ ise $1° = 3600^{II}$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 197293^{II} & 3600^{II} \\ \underline{-\;18000} & 54° \\ 17293 & \\ \underline{-\;14400} & \\ 2893^{II} & \end{array}$$

$197293^{II} = 54°,\ 2893^{II}$ olur.

$$\begin{array}{r|l} 2893^{II} & 60^{II} \\ \underline{-\;240} & 48^{I} \\ 493 & \\ \underline{-\;480} & \\ 13^{II} & \end{array}$$

$197293^{II} = 54°, 48^{I}, 13^{II}$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{4}$ radyan, $m(\widehat{ABC}) = 36°$ ise

$m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

Çözüm:

$\frac{\pi}{4}$ radyan $\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{D}{180°}$

$D = 45°$ olur veya

$\pi = 180°$ ise

$\frac{\pi}{4} = \frac{180}{4} = 45°$ olarak buluruz.

Üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğuna göre

$45° + 36° + m(\widehat{ACB}) = 180°$

$m(\widehat{ACB}) = 99°$ bulunur.

Örnek:

$x = 53°, 19', 52''$ ve

$y = 22°, 45', 59''$ ise

x – y kaç derece, kaç dakika, kaç saniyedir?

Çözüm:

Her birini kendi cinsinden çıkarmak için bir düzenleme yapalım.

$53° = 52°\,60' = 52°\,59'\,60''$ dir.

$53°\,19'\,52'' = (52°\,59'\,60'')\,19'\,52''$ ve

$= 52°\,78'\,112''$ olur.

$$\begin{array}{rl} & x = 52°, 78', 112'' \\ - & y = 22°, 45', 59'' \\ \hline & x - y = 30°\,33'\,53'' \end{array}$$

bulunur.

Örnek

45° lik açıyı radyan cinsinden ifade ediniz.

Çözüm

$\frac{45}{180} = \frac{R}{\pi}$ ise $45° = \frac{\pi}{4}$ radyan bulunur.

Sıra Sende

$x = 23°, 12', 17''$ ve

$y = 19°, 27', 53''$ ise

4x + y kaç derece, kaç dakika, kaç saniyedir?

Sıra Sende

$x = \frac{4\pi}{5}$ ve

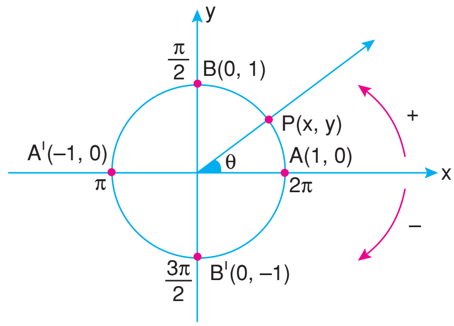
$y = 98°$ ise

x + y kaç derecedir?

BİRİM ÇEMBER:

Merkezi başlangıç noktası, yarıçap uzunluğu 1 br olan çembere birim çember ya da trigonometrik çember denir.

Birim çemberin denklemi: $x^2 + y^2 = 1$ dir.



Birim çember üzerindeki A(1, 0) noktası daima çemberin başlangıç noktası olarak alınacaktır. Bu duruma göre A dan B ye hareket pozitif yön, A dan B' ye doğru hareket de negatif yön olarak alınmış olur.

a) Birim çember üzerinde 0 radyanlık yayın başlangıç ve bitim noktası A(1, 0) dır.

b) Ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ radyan olan pozitif yönlü yayın bitim noktası B(0, 1) dir.

c) Ölçüsü π radyan olan pozitif yönlü yayın bitim noktası A'(– 1, 0) dır.

d) Ölçüsü $\frac{3\pi}{2}$ radyan olan pozitif yönlü yayın bitim noktası B'(0, – 1) dir.

e) Ölçüsü 2π radyan olan pozitif yönlü yayın bitim noktası A(1, 0) dır.

Uyarı

x radyan = α

$\frac{\pi}{2}$ radyan = 90°

π radyan = 180°

$\frac{3\pi}{2}$ radyan = 270°

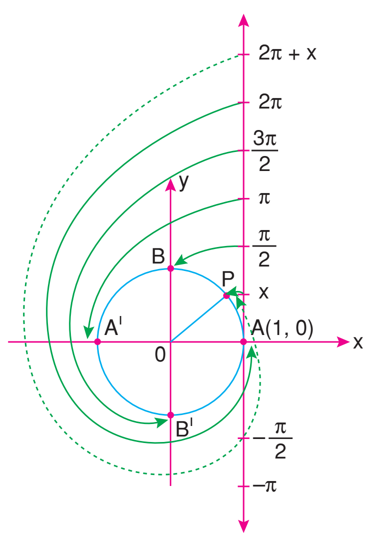
2π radyan = 360°

Uyarı

$\frac{\pi}{6} = 30°$

$\frac{\pi}{4} = 45°$

$\frac{\pi}{3} = 60°$



Reel sayı doğrusu üzerindeki 0 sayısı ile birim çemberin A(1, 0) noktası ile çakışacak şekilde sayı doğrusunu çebere teğet yapalım. Sayı doğrusunu çember üzerine saralım.

Sayı doğrusundaki x sayısı çember üzerinde P noktasına, sayı doğrusundaki $\frac{\pi}{2}$ sayısı çember üzerinde B noktasına, π sayısı A' noktasına, $\frac{3\pi}{2}$ sayısı B' noktasına, 2π sayısı A noktasına çakışır. $2\pi + x$ sayısı ise tekrar P noktasına çakışır.

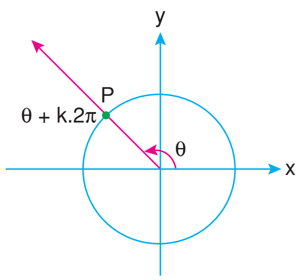
P noktası ile eşlenen sayılar kümesi

$x, x + 2\pi, x + 2.2\pi, x + 3.2\pi, x + 4.2\pi, \ldots$ ve $k \in Z$ olmak üzere $x + k.2\pi$ noktalarının herbiri aynı P noktası ile çakışır. P noktasına karşılık gelen bu $x + k.2\pi$ sayılarına $\overset{\frown}{AP}$ yayının radyan türünden ölçüsü denir.

$m(\overset{\frown}{AP}) = m(\overset{\frown}{ADP}) = x + k.2\pi$

$0 \leq x < 2\pi$ ise x sayısının radyan türünden esas ölçüsü denir.

BİR AÇININ ESAS ÖLÇÜSÜ:



$0 < \theta < 2\pi$ olmak üzere P noktasına karşılık gelen bütün açıları radyan cinsinden $\theta + k.2\pi$, $k \in Z$ biçiminde tanımlayabiliriz. Bu açıların esas ölçüleri θ dır.

Uyarı

Açı derece cinsinden ve pozitif yönlü ise açının 360° ye bölümünden kalan esas ölçüdür. Negatif açılarda bölme işlemi tanımına uygun yapıldığında kalan esas ölçüdür.

Örnek:

1923° nin esas ölçüsünü bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 1923^\circ & 360^\circ \\ \hline -\ 1800^\circ & 5 \\ \hline 123^\circ & \end{array}$$

1923° = 123° + 5.360° olduğundan esas ölçüsü 123° bulunur.

Örnek:

1680° nin esas ölçüsü kaç derecedir?

$$\begin{array}{r|l} 1680^\circ & 360^\circ \\ \hline -\ 1440^\circ & 4 \\ \hline 240^\circ & \end{array}$$

verilen sayının içinden 360° ve katları atılır.

1680° = 240° + 4.360° ve 1680° nin esas ölçüsü 240° olur.

Örnek:

–1680° nin esas ölçüsü kaç derecedir? (açı negatif yönlü)

$$\begin{array}{r|l} -1680^\circ & 360^\circ \\ \hline -\ \pm 1800^\circ & -5 \\ \hline +120^\circ & \end{array}$$

–1680° den 360° nin katlarını atalım.

–1680° = 120° – 5.360° ve

–1680° nin esas ölçüsü 120° dir.

Örnek:

$\frac{19\pi}{3}$ ün esas ölçüsü kaç radyandır?

$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3.2\pi + \frac{\pi}{3}$ den $\frac{19\pi}{3}$ ün esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ bulunur.

Başka bir düşünceyle $\frac{19\pi}{3}$ ün esas ölçüsü bulunurken payın katsayısı paydanın iki katına bölünerek kalan paya yazılarak bulunur.

$\frac{19\pi}{3}$ den 19 u 3 ün iki katı 6 ya bölelim.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 6 \\ -18 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

kalan paya gelecek şekilde $\frac{1\pi}{3}$ diye yazılır.

Sıra Sende

–1200° nin esas ölçüsü kaç radyandır?

Örnek:

$\frac{23\pi}{3}$ ün esas ölçüsünü bulunuz.

23 sayısını paydanın iki katı 2.3 = 6 ile bölersek

$$\begin{array}{r|l} 23 & 6 \\ 18 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}$$

kalan 5 sayısını paya yazıp $\frac{23\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$ esas ölçü bulunur.

Örnek:

– 765° nin esas ölçüsünü bulalım.

$$\begin{array}{r|l} -765° & 360° \\ \pm 1080° & -3 \\ \hline 315° & \end{array}$$

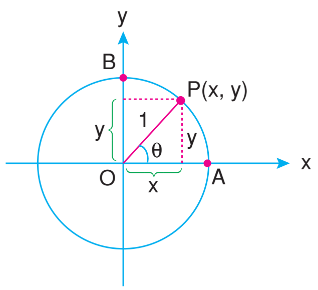
–765° = 315° + (–3).360° olduğundan esas ölçüsü 315° bulunur.

Örnek:

$-\frac{71\pi}{4}$ nin esas ölçüsünü bulalım.

$-\frac{71\pi}{4} = \frac{-72\pi + \pi}{4} = -9.2\pi + \frac{\pi}{4}$ olduğundan esas ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ bulunur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ:



OPA üçgeninde

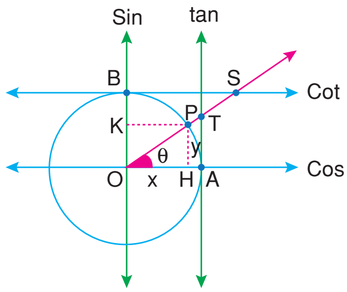
$\sin\theta = \dfrac{y}{1} = y$ ve

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$ dir.

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ve

$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ dir.

θ açısının belirttiği P noktasının birinci bileşenine θ açısının **kosinüsü**, ikinci bileşenine θ açısının **sinüsü** denir.



Yukarıdaki şekilde |AT| uzunluğuna θ açısının **tanjantı**, |BS| uzunluğuna θ açısının **kotanjantı** denir.

Buna göre θ açısı için,

$|OH| = \cos\theta$

$|OK| = \sin\theta$

$|AT| = \tan\theta$

$|BS| = \cot\theta$ dır.

$OPH \simeq OTA$ için

$$\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|PH|}{|TA|}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{|AT|}$$

$$|AT| = \frac{y}{x},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ olur.}$$

$OPH \simeq SOB$ için

$$\frac{|OH|}{|BS|} = \frac{|PH|}{|OB|},$$

$$\frac{x}{|BS|} = \frac{y}{1} \text{ ve } |BS| = \frac{x}{y},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ dır.}$$

Uyarı

Buna göre; $x = \cos\theta$ ve $y = \sin\theta$ dır.

$x^2 + y^2 = 1$ olduğundan

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ dir.

Uyarı

Her $\theta \in R$ için

$-1 \le \sin\theta \le 1 \Leftrightarrow |\sin\theta| \le 1$

$-1 \le \cos\theta \le 1 \Leftrightarrow |\cos\theta| \le 1$ dir.

Uyarı

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)$

Uyarı

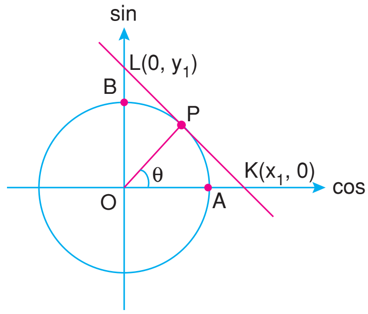
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)$

Uyarı

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ dır.

$\tan\theta.\cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 1$ olur.



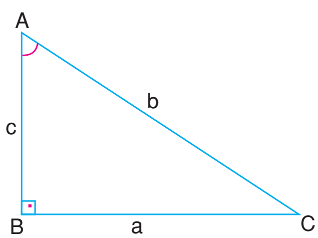
Uyarı

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ ve

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ dır.

Yukarıdaki birim çembere P noktasından çizilen teğetin cosinüs eksenini kestiği $K(x_1, 0)$ noktasının apsisine θ açısının sekantı denir ve $x_1 = \sec\theta$ şeklinde gösterilir. Birim çembere P noktasından çizilen teğetin sinüs eksenini kestiği $L(0, y_1)$ noktasının ordinatına θ açısının kosekantı denir ve $y_1 = \operatorname{cosec}\theta$ şeklinde gösterilir.

DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI:



Şekildeki A açısının trigonometrik oranları,

$$\sin A = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos A = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\cot A = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

Sıra Sende

$$\frac{1 - \cos x}{\cot x + \sin x - \operatorname{cosec} x}$$

ifadesinin eşiti nedir?

Sonuçlar:

1) $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

2) $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

3) $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$

Verilen bir trigonometrik ifadeyi sadeleştirmek için; ifadede yalnızca tanjant ve kotanjat ifadeleri varsa birini diğeri türünden yazarız.

Eğer ifade tanjant ve kotanjant dışındada terimler varsa terimlerin sinüs ve kosinüs türünden değerleri yazılarak işleme devam edilmesi sonuca daha kolay ulaşmanızı sağlar.

Örnek:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{3}{2}$$ ise **tanx kaçtır?**

Çözüm:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{3}{2}$$

2sinx + 2cosx = 3sinx – 3cosx

5cosx = sinx

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 5$$

tanx = 5 bulunur.

Örnek:

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x}$$ **ifadesinin sadeleşmiş biçimi nedir?**

Çözüm:

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{\frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + 1}$$

$$= \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek

$$4 - \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$$

işleminin sonucu nedir?

Çözüm

20° + 70° = 90° olduğundan

tan20° = cot70° dir.

$$4 - \frac{\tan 20°}{\cot 70°} = 4 - \frac{\tan 20°}{\tan 20°}$$

4 – 1 = 3 olur.

Sıra Sende

$$\frac{4\cos 50°}{\sin 40°} + \frac{3\cot 65°}{\tan 25°} =$$

işleminin sonucu nedir?

Örnek

$\dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}$ **ifadesinin sadeleşmiş biçimi nedir?**

Çözüm

$$\frac{1+\cot x}{1+\tan x}=\frac{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

bulunur.

Örnek

$\tan x - \cot x = 3$ ise

$\tan^2 x + \cot^2 x$ kaçtır?

Çözüm

$(\tan x - \cot x)^2 = 3^2$

$\tan^2 x - \underbrace{2\tan x.\cot x}_{1} + \cot^2 x = 9$

$\tan^2 x + \cot^2 x = 11$ bulunur.

ÖNEMLİ DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	T
cot	T	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

(T : tanımsız)

4) $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$

5) $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$

6) Birbirini 90° ye tamamlayan açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 90°$ ise

$\sin A = \cos B$

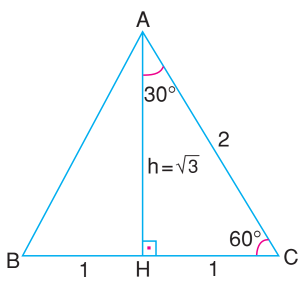
$\tan A = \cot B$

7) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

8) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

30° ve 60° nin trigonometrik oranlarının bulunması:

Bunun için bir kenarı 2 br olan eşkenar üçgenden faydalanalım:



$h^2 + 1^2 = 2^2$

$h = \sqrt{3}$ bulunur.

ABC üçgeninde tanımlara göre değerler yazılırsa,

$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

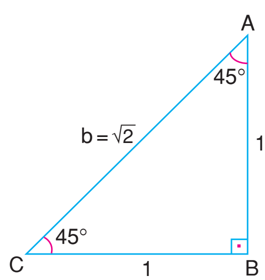
$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$

$\cot 30° = \sqrt{3}$ $\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur.

45° nin trigonometrik oranlarının bulunması:

Bunun için dik kenarlarının uzunluğu 1 br olan ikizkenar dik üçgenden yararlanalım.



$\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = 1$

$\cot 45° = 1$

$b^2 = 1^2 + 1^2$

$b = \sqrt{2}$ bulunur.

Trigonometrik Oranlardan birisi belli iken diğerinin bulunması

Taslak bir diküçgen çizilip dar açılardan birisi seçilerek verilen trigonometrik oranlar bu üçgende yerleştirilir.

Üçüncü kenar pisagor bağıntısı yardımıyla hesaplanarak diğer trigonometrik oranlar bu üçgen yardımıyla okunur.

"Açı hangi bölgede verilirse verilsin dar açı gibi düşünüp çözer işaretini daha sonra bulunduğu bölgeye göre yazarız.

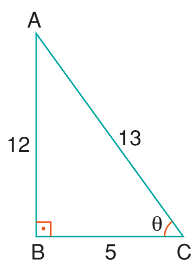
Örnek:

$\theta < 90°$ ve

$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ ise

$\tan\theta$ değeri kaçtır?

Çözüm:



ABC taslak diküçgeni çizilip C açısını θ ile gösterirsek

$\cos\theta = \dfrac{|BC|}{|AC|}$ den $|BC| = 5$ ve

$|AC| = 13$ yazılıp

[AB] kenarı pisagor bağıntısı yardımıyla

$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2$

$13^2 = 5^2 + |AB|^2$ ve $|AB| = 12$ br bulunur.

$\tan\theta = \dfrac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}$ tanımından

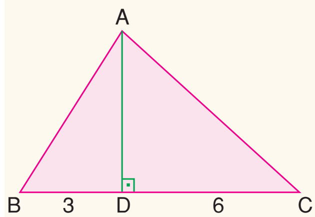
$\tan\theta = \dfrac{12}{5}$ bulunur.

Sıra Sende

$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$ ise

$\sin\theta + \cos\theta$ kaçtır?

Örnek



Şekildeki ABC üçgeninde

$[AD] \perp [BC]$,

$|BD| = 3$ br ve

$|DC| = 6$ br ise

$\dfrac{\tan(\widehat{ABC})}{\tan(\widehat{ACB})}$ **kaçtır?**

Çözüm

$\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{|AD|}{3}$

$\tan(\widehat{ACB}) = \dfrac{|AD|}{6}$ olur.

$\dfrac{\tan(\widehat{ABC})}{\tan(\widehat{ACB})} = \dfrac{\frac{|AD|}{3}}{\frac{|AD|}{6}}$

$= \dfrac{|AD|}{3} \cdot \dfrac{6}{|AD|}$

$= 2$ bulunur.

Sıra Sende

$\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{1}{3}$ ise

sin α kaçtır?

Zorluklar başarının değerini artıran süslerdir.
Moliere

Bilmediğini bilmek en iyisidir. Bilmeyip de bildiğini sanmak tehlikeli bir hastalıktır.
Lao Tzu

Örnek:

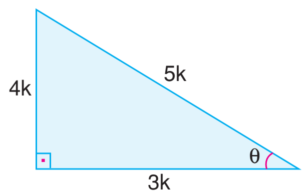
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ ise

cosθ + tanθ – cotθ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm:

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ ise



taslak bir ABC üçgeni çizilip karşı dik kenara 4, hipotenüse 5 oranı yazılıp üçüncü kenar (komşu kenar) pisagor bağıntısıyla hesaplanır.

Diğer trigonometrik oranlar bu üçgenden okunup değerler yerine yazılırsa

$\cos\theta = \dfrac{3k}{5k} = \dfrac{3}{5}, \ \tan\theta = \dfrac{4k}{3k} = \dfrac{4}{3}$

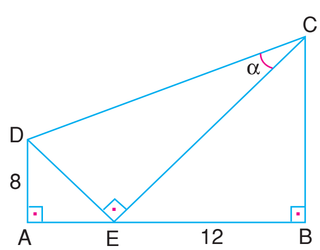
$\cot\theta = \dfrac{3k}{5k} = \dfrac{3}{4}$ olur.

$\cos\theta + \tan\theta - \cot\theta = \underset{(12)}{\dfrac{3}{5}} + \underset{(20)}{\dfrac{4}{3}} - \underset{(15)}{\dfrac{3}{4}}$

$= \dfrac{36 + 80 - 45}{60}$

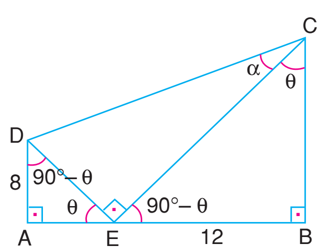
$= \dfrac{71}{60}$ bulunur.

Örnek:



Şekilde $[AD] \perp [AB]$,
$[BC] \perp [AB]$, $[DE] \perp [EC]$,
$|AD| = 8$ br, $|EB| = 12$ br ve $m(D\widehat{C}E) = \alpha$ ise
cot α kaçtır?

Çözüm:



$m(D\widehat{E}A) + m(C\widehat{E}B) = 90°$ olduğundan
$m(D\widehat{E}A) = \theta$ ise
$m(C\widehat{E}B) = 90° - \theta$,
$m(A\widehat{D}E) = 90° - \theta$ ve
$m(E\widehat{C}B) = \theta$ olur.
DAE ve EBC üçgenlerinin açıları eşit olduğundan

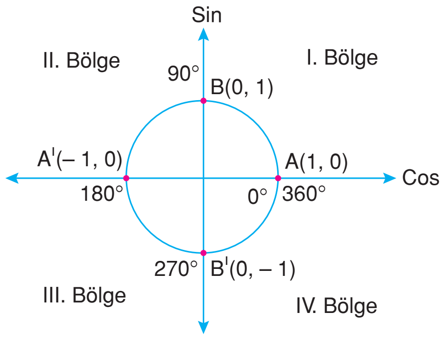
DAE ~ EBC olur.

$$\frac{|DA|}{|EB|} = \frac{|DE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{|DE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{|DE|}{|EC|} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

|DE| = 2k, |EC| = 3k olur. DEC dik üçgeninde

$$\cot\alpha = \frac{|EC|}{|DE|} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN BÖLGELERE GÖRE İŞARETİ VE İNDİRGEME FORMÜLLERİ:



	I. Bölge	II. Bölge	III. Bölge	IV. Bölge
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
cot	+	–	+	–

sin 0° = 0 sin 90° = 1 sin 180° = 0 sin 270° = – 1

cos 0° = 1 cos 90° = 0 cos 180° = – 1 cos 270° = 0

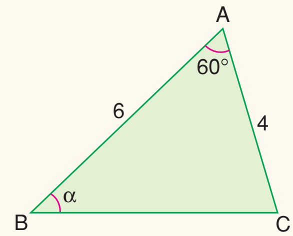
1) θ ve $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$$
$$\cot(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$$

2) θ ve $(\pi - \theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

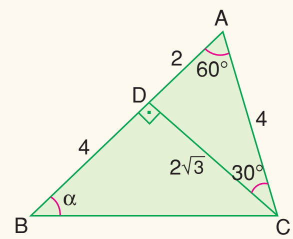
Örnek



Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 60°$, |AB| = 6 br, |AC| = 4 br ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ise

tan α kaçtır?

Çözüm



ADC dik üçgeninde

|AC| = 4 br ise

|AD| = 2 br ve

|DC| = $2\sqrt{3}$ br olur.

|BD| = |AB| – |AD|

= 6 – 2

= 4 br olur.

BDC dik üçgeninde

$$\tan\alpha = \frac{|DC|}{|BD|}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek

$\sin 100° = \sin(180° - 80°)$
$= \sin 80°$

$\sin 100° = \sin(90° + 10°)$
$= \cos 10°$

$\tan 250° = \tan(180° + 70°)$
$= \tan 70°$

$\tan 250° = \tan(270° - 20°)$
$= \cot 20°$

$\cos 220° = \cos(180° + 40°)$
$= -\cos 40°$

$\cos 220° = \cos(270° - 50°)$
$= -\sin 50°$

$\cot 350° = \cot(360° - 10°)$
$= -\cot 10°$

$\cot 350° = \cot(270° + 80°)$
$= -\tan 80°$

3) θ ve $(\pi + \theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$
$$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$$

4) θ ve $(2\pi - \theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$$

5) θ ve $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$$

6) θ ve $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

7) θ ve $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

8) θ ve $(-\theta)$ biçimindeki açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Örnek:

$$\begin{aligned}\sin 840° &= \sin(120° + 2.360)\\ &= \sin 120°\\ &= \sin(180° - 60°)\\ &= \sin 60°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 1320° &= \cos(240° + 3.360)\\ &= \cos 240°\\ &= \cos(180° + 60°)\\ &= -\cos 60°\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 1740° &= \tan(300° + 4.360)\\ &= \tan 300°\\ &= \tan(360° - 60°)\\ &= -\tan 60°\\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot 600° &= \cot(240° + 360)\\ &= \cot 240°\\ &= \cot(180° + 60°)\\ &= \cot 60°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Örnek

$$\begin{aligned}\sin(-160°) &= -\sin 160°\\ &= -\sin(180° - 20°)\\ &= -\sin 20°\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-210°) &= \cos 210°\\ &= \cos(180° + 30°)\\ &= -\cos 30°\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(-130°) &= -\tan 130°\\ &= -\tan(180° - 50°)\\ &= \tan 50°\end{aligned}$$

$$\cot(-60°) = -\cot 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sıra Sende

$\sin(-150°) =$
$\cos(-40°) =$
$\tan(-30°) =$
$\cot(-60°) =$

ifadelerinin sonucu kaçtır?

Örnek

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olmak üzere

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ ise

cos θ, tan θ, cot θ yı bulunuz?

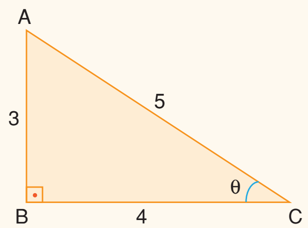
Çözüm

II. bölgede $\cos\theta < 0$,

$\sin\theta > 0$,

$\tan\theta < 0$ ve

$\cot\theta < 0$ dır.



$\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\cot\theta = -\frac{4}{3}$ bulunur.

Sıra Sende

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olmak üzere

$\cot\theta = -2$ ise

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ yı bulunuz.

Örnek:

$$A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + \sin(5\pi + x) - \cos(3\pi - x)$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

$\cos\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin(5\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(3\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$ olduğundan

$A = -\cos x + \sin x - \sin x + \cos x = 0$ dır.

Örnek:

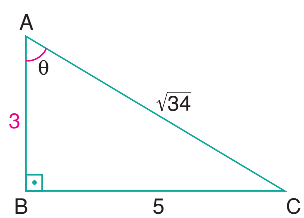
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$\tan\theta = \frac{5}{3}$ ise

sin θ, cos θ, cot θ yı bulunuz.

Çözüm:

III. bölgede $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ ve $\cot\theta > 0$ dır.

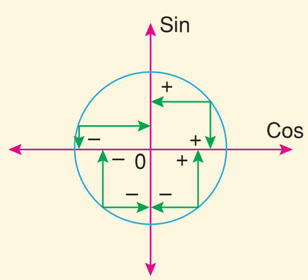


$\sin\theta = \frac{-5}{\sqrt{34}}$

$\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{34}}$

$\cot\theta = \frac{3}{5}$ bulunur.

KOLAYLIK



Bölgelere göre trigonometrik fonksiyonların işareti incelenirken bölgeye ait birim çember üzerinde alacağımız herhangi bir noktadan sinüs ve cosinüs eksenlerine dikmeler çizilir. Bu dikmelerin ayakları eksenleri pozitif veya negatif yerde keserler. Böylece sin ve cos işareti görülür.

tan ve cot ın işaretleri ise sinüs ve cosinüs işaretlerinin bölümü (veya çarpımı) ile bulunur.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ve $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Örneğin II. bölgede $\sin\theta > 0$ (+) ve

$\cos\theta < 0$ (–) dir.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{+}{-} = -$ dir.

KOLAYLIK

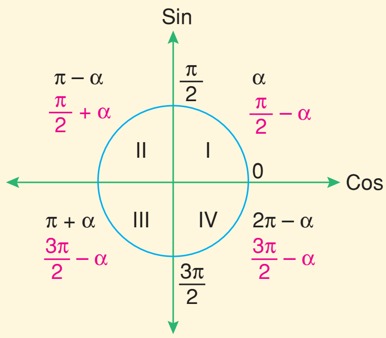
Herhangi bir sayının esas ölçüsü bulunduktan sonra bu sayının bölgelere göre ifadesi şöyledir.

I. bölge α veya $\frac{\pi}{2} - \alpha$

II. bölge $\pi - \alpha$ veya $\frac{\pi}{2} + \alpha$

III. bölge $\pi + \alpha$ veya $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ ve

IV. bölge $2\pi - \alpha$ veya $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ dır.



KOLAYLIK

Herhangi bir sayının trigonometrik oranlarını bulmak için

1. Verilen sayının varsa içerisinden 2π nin (360° nin) katları atılır. (Esas ölçü bulunur.)
2. Elde edilen bu sayı bulunduğu bölgeye göre α, $\frac{\pi}{2} \mp \alpha$, $\pi \mp \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \mp \alpha$, $2\pi - \alpha$ biçimlerinden birisi ile ifade edilir.
3. Sayının bulunduğu bölgede işareti belirlenir.
4. $\mp\alpha$, $\pi \mp \alpha$, $2\pi - \alpha$ biçiminde ise ismini değiştirmeden,

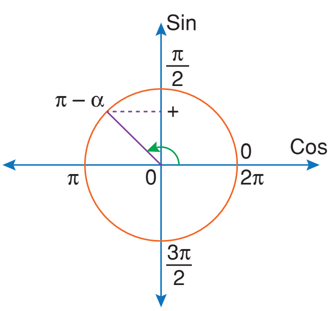
   $\frac{\pi}{2} \mp \alpha$ ve $\frac{3\pi}{2} \mp \alpha$ biçiminde ise ismini değiştirerek α türünden yazarız.

   (İsmini değiştirmekten kasıt sinüsü, cosinüse tanjantı, cotanjanta çevirmek)

Örnek:

sin($9\pi - \alpha$) değerini α türünden yazalım.

Çözüm:



$9\pi - \alpha$ dan $4.2\pi = 8\pi$ yi atarsak

$\sin(4.2\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ kalır.

$\pi - \alpha$ II. bölgede ve bu bölgede sinüs + işaretlidir. $\pi - \alpha$ biçiminde olduğundan ismini değiştirmeden

$\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$ diye yazarız.

Sıra Sende

$\frac{\cos 220° + \sin 130° - \sin 870°}{\sin 330°}$

ifadesinin sonucu kaçtır?

Sıra Sende

cos110° nin sinüs türünden değeri nedir?

Örnek:

$\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$ nın α **türünden değeri nedir?**

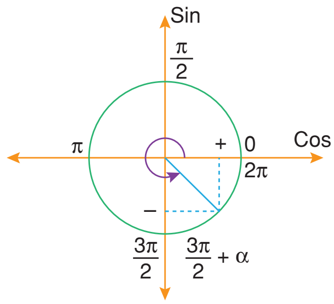
Çözüm:

$\frac{7\pi}{2}$ nin esas ölçüsünü bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 7\pi & 4 \\ \hline -\ 4\pi & 1 \\ \hline 3\pi & \end{array}$$

$\frac{7\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}$ dir.

$\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ ve



$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ IV. bölgede ve bu bölgede

sin < 0, cos > 0 ise tan < 0 dır.

$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ olduğundan isim değişecek.

$\tan\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

Sıra Sende

tan1740° eşiti nedir?

Örnek:

cos1200° nin eşiti nedir?

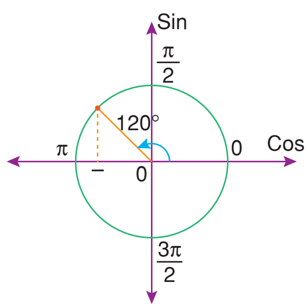
Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} 1200^\circ & 360^\circ \\ \hline -\ 1080^\circ & 3 \\ \hline 120^\circ & \end{array}$$

1200° nin esas ölçüsünü bulalım.

1200° nin esas ölcüsü 120° dir.

cos1200° = cos120°



120° II. bölgeye ait bir açı II. bölgede cosinüsün işareti (–) dir.

II. bölgede açı $\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$ diye yazılır.

120° = 180° – 60° ve ismi değişmeden

Sıra Sende

$\sec x.\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)-\tan(\frac{\pi}{2}-x).\sin x$

ifadesinin değeri nedir?

cos1200° = cos120° = cos(180° – 60°) = –cos60° = $-\frac{1}{2}$ bulunur veya

cos1200° = cos120°

120° II. bölgededir ve $\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$ biçiminde yazılır.

II. bölgede cosinüsün işareti (–) dir.

1200° = 120° = 90° + 30° ve ismini değiştirerek

cos1200° = cos120° = cos(90° + 30°) = –sin30° = $-\frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek:

$A = \sin(5\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

işleminin sade biçimi nedir?

Çözüm:

$\sin(5\pi - \alpha) = \sin(2.2\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha)$ olur.

$\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin\alpha$ ve

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$ dır.

$A = \sin(5\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$A = \sin\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha$

$A = \sin\alpha$ bulunur.

Sıra Sende

$\cot\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$

işleminin sonucu nedir?

Sıra Sende

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$\tan\theta = 0{,}6$ ise $\sin\theta.\cos\theta$ çarpımının sonucu kaçtır?

Örnek:

sin210° nin eşiti nedir?

Çözüm:

$\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30$

$= -\frac{1}{2}$ veya

$\sin 210° = \sin(270° - 60°) = -\cos 60°$

$= -\frac{1}{2}$ olur.

Örnek:

$\tan\frac{3\pi}{4}$ ün değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ yani $\pi - \frac{\pi}{4}$ dür.

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

Örnek

$\sin 750° + \cos(-1500°)$ **toplamı kaçtır?**

Çözüm

$\sin 750° = \sin(30° + 2.360°)$

$= \sin 30°$

$= \frac{1}{2}$

$\cos(-1500°) = \cos(-60° + (-4).360°)$

$= \cos(-60°) = \cos 60°$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ bulunur.

Sıra Sende

$\tan 25° = a$ olduğuna göre

$$\frac{\tan 205° + \tan 115°}{\tan 335° - \tan 295°}$$

ifadesinin sonucu nedir?

Örnek:

$\sqrt{3}.\sin\left(-\frac{43\pi}{3}\right)$ **ifadesinin eşiti kaçtır?**

Çözüm:

$$\sqrt{3}.\sin\left(-\frac{43\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.\sin\left(\frac{-42\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}.\sin\left(-14\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

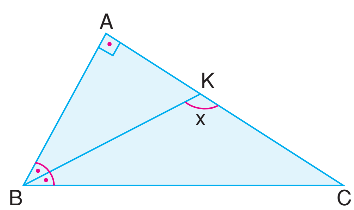
$$= \sqrt{3}.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sqrt{3}.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= -\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$ bulunur.

Örnek:

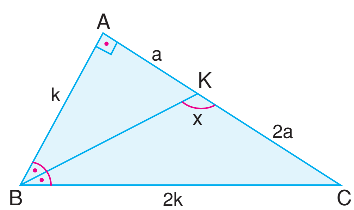


ABC dik üçgen, [BK] açıortay ve

$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ ise

$1 + \tan^2 x$ **ifadesinin eşiti nedir?**

Çözüm:



$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ ise $|AK| = a$

$|AC| = 3a$ diyelim.

$|KC| = 2a$ olur.

[BK] açıortay olduğundan

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{1}{2}$ olduğundan

$m(\widehat{C}) = 30°$, $m(\widehat{B}) = 60°$, $m(\widehat{ABK}) = 30°$

$m(\widehat{BKC}) = x = 90° + 30° = 120°$ dir.

$1 + \tan^2 120° = 1 + (-\sqrt{3})^2 = 4$ bulunur.

Örnek:

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere

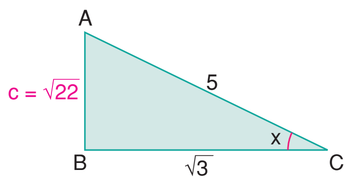
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ ise **tanx kaçtır?**

Çözüm:

Açı II. bölgede olduğu için

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{5} < 0$ dir. Aynı bölgede tanx inde işareti (–) dir.

Taslak diküçgende seçilen x açısına komşu dik kenar $\sqrt{3}$ br ve hipotenüs 5 br seçilip diğer dik kenar hesaplanırsa



$5^2 = \sqrt{3}^2 + c^2$

$22 = c^2$

$c = \sqrt{22}$ br olur.

$\tan x = -\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{3}}$ olur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninde $\cos A + \cos(B + C)$

ifadesinin sonucu nedir?

Çözüm:

$A + B + C = 180°$ ve

$B + C = 180° - A$ dır.

$\cos(B + C) = \cos(180° - A)$

$\cos(B + C) = -\cos A$ ve

$\cos A + \cos(B + C)$ de yerine yazılırsa

$\cos A - \cos A = 0$ bulunur.

Örnek:

Bir ABC üçgeninde

$\cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{A+C}{2}$ **işleminin sonucu nedir?**

Çözüm:

$A + B + C = 180°$, $A + C = 180° - B$ ve $\frac{A+C}{2} = 90° - \frac{B}{2}$ dir.

$\cot\frac{A+C}{2} = \cot\left(90° - \frac{B}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}$ olur.

$\cot\frac{B}{2} . \cot\frac{A+C}{2}$ de yerine yazarsak

$\cot\frac{B}{2} . \tan\frac{B}{2} = 1$ bulunur.

Örnek:

$\tan x + \cot x$ **ifadesinin sade biçimi nasıldır?**

Sıra Sende

Bir ABC üçgeninde

$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B+C}{2}$

işleminin sonucu nedir?

Sıra Sende

$\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x}$

işlemini sadeleştiriniz.

Sıra Sende

$\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

işlemini sadeleştiriniz.

Sıra Sende

$$\frac{1}{\cos^2x} - \frac{1}{\cot^2x}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

Körlerin ülkesinde, tek gözlü insan kral olur.
Desiderius Erasmus

Çözüm:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \text{(payda eşitlersek)}$$

$$\frac{\sin^2 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x . \cos x} \quad \text{olur.}$$

Örnek:

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$ **ifadesini sadeleştiriniz.**

Çözüm:

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\cos^2 x}{1} = \sin x . \cos x \quad \text{olur.}$$

Örnek:

sinx(cosecx – sinx) **ifadesini sadeleştiriniz.**

Çözüm:

$$\sin x\left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) =$$

$$\sin x\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\right) = \cancel{\sin x} . \frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin x}} = \cos^2 x \quad \text{olur.}$$

Örnek:

(cosecx – 1)(cosecx + 1) **işlemini sadeleştiriniz.**

Çözüm:

$$\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin x} + 1\right) = \frac{1-\sin x}{\sin x} . \frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x \quad \text{olur.}$$

Örnek:

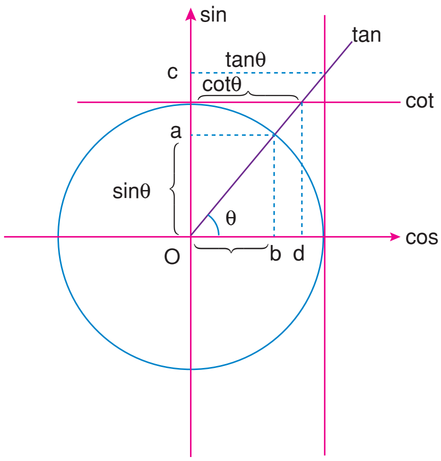
$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x - \cos^2 y}$$ **işlemini sadeleştiriniz.**

Çözüm:

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x - \cos^2 y} = \frac{(1-\cos^2 x) - (1-\cos^2 y)}{\cos^2 x - \cos^2 y}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x - 1 + \cos^2 y}{\cos^2 x - \cos^2 y} = \frac{-(\cos^2 x - \cos^2 y)}{\cos^2 x - \cos^2 y} = -1 \quad \text{olur.}$$

Verilen bir θ açısının trigonometrik değeri:



Şekildeki birim çember de verilen bir θ açısının trigonometrik değerleri belirtilmiştir. İnceleyiniz.

$a = \sin\theta$

$b = \cos\theta$

$c = \tan\theta$

$d = \cot\theta$

Açının sinüs ve cosinüs değeleri için açının kolunun çemberi kestiği noktanın apsisi cos değerini, ordinatı sinüs değerini verir.

Açının tanjant ve cotanjan değerleri ise tanjant ve cotanjant eksenini kestiği noktaların ordinat ve apsisleridir.

sinüs ve tanjant ile cosinüs ve cotanjant ekseninin paralel olduğuna dikkat ediniz.

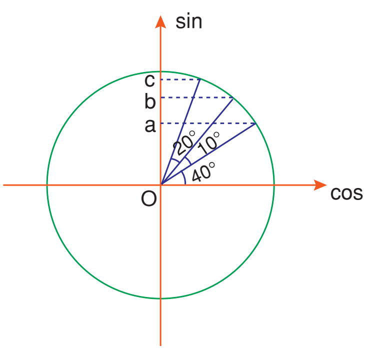
Örnek:

$a = \sin 40°$

$b = \cos 40°$

$c = \sin 110°$ nin **doğru sıralanışı nasıldır?**

Çözüm:



$b = \cos 40° = \sin 50°$ dir.

$c = \sin 110° = \sin(180° - 70°) = \sin 70°$ dir.

sinüs değeri 0° den 90° ye kadar açı değeri büyüdükçe sinüs değeride büyür. Yani

$\sin 70° > \sin 50° > \sin 40°$ dir.

$c > b > a$ dır.

Örnek

$a = \sin 105°$

$b = \tan 46°$

$c = \cos 50°$

$d = \cot 15°$ ise

a, b, c, d nin doğru sıralanışı nasıldır?

Çözüm

İfadelerin daha rahat kıyaslanabilmesi için sinüs ve tanjant ya da cosinüs ve cotanjanta çevirmek doğru olur.

$a = \sin 105° = \sin(180° - 75°)$

$= \sin 75°$

$b = \tan 46°$

$c = \cos 50° = \sin 40°$

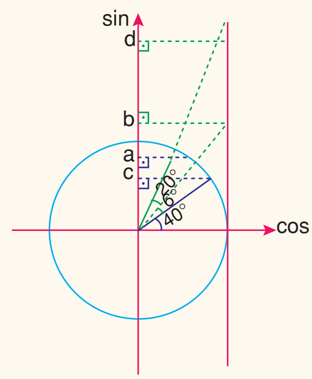
$d = \cot 15° = \tan 75°$

$\tan 75° > \tan 46° > 1$

$(\tan 45° = 1)$

$1 > \sin 75° > \sin 40°$ o halde

$d > b > a > c$ doğru sıralama olur.



Uyarı

$f(x) = a\sin x \pm b\cos x$ ifadesinin en büyük (en küçük) değeri

$-\sqrt{a^2 + b^2} \le f(x) \le \sqrt{a^2 + b^2}$ ile kolayca bulunur.

ETKİNLİK - 1

1. **Aşağıda verilen sorularda istenilenleri bulunuz.**

a) $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ve $\tan\theta = 4$ ise **cos**θ **kaçtır?**

b) $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ve $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ise **sin**θ **kaçtır?**

c) $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ve $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ise **tan**θ **kaçtır?**

2. **Aşağıda verilen ifadeleri sadeleştiriniz.**

a) $\cos^3 x.\sin x + \sin^3 x\cos x =$

b) $\cos x(\sec x - \cos x) =$

c) $\cot x.\sin x =$

d) $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x} \cdot \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} =$

3. **Aşağıda verilen ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.**

a) $\sin^3\theta + \sin\theta.\cos^2\theta = \sin\theta$

b) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

c) $(\cot\theta - \mathrm{cosec}\theta)^2 = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

d) $\frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = \sin\theta.\cos\theta$

4. **Aşağıda verilen ifadelerin işaretleri sırasıyla nasıldır?**

a) sin140°, cos280°, tan300°, cot460°

b) sin330°, cot170°, sec210°

c) cos750°, tan720°, sin510°

5. **Aşağıda verilen ifadelerin büyüklük sırası nasıldır?**

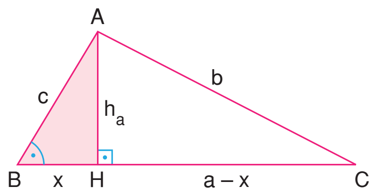
I. a = cos110°
b = tan130°
c = cot170°

II. a = sin330°
b = sin65°
c = 115°

III. a = sin70°
b = cos20°
c = tan44°
e = cot45°

6. **f(x) = 3 sinx + 4cosx in en büyük değeri kaçtır?**

KOSİNÜS TEOREMİ



ABC üçgeninde [AH] ⊥ [BC] çizelim ve

ABH ile AHC üçgenlerinde pisagor bağıntılarını yazalım.

$b^2 = (a - x)^2 + h^2$

$c^2 = x^2 + h^2$ taraf tarafa çıkarırsak

$b^2 - c^2 = (a - x)^2 + h^2 - x^2 - h^2$

$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax + \cancel{x^2} + \cancel{h^2} - \cancel{x^2} - \cancel{h^2}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax$ olur.

Öte yandan $\cos B = \frac{x}{c}$ den

$x = c.\cos B$ dir. Bunu yukarıda yerine yazarsak

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax$ ve

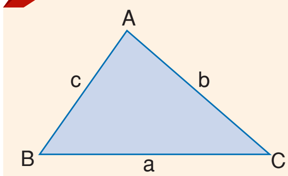
$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos B$ bulunur.

Benzer şekilde hareketle

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ ve

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ bulunur.

Uyarı



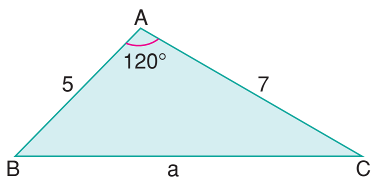
ABC üçgeninde,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$

Örnek:



Şekildeki ABC üçgeninde |AB| = 5 br, |AC| = 7 br

$m(\hat{A}) = 120°$ ise **|BC| = a kaç br dir?**

Uyarı

Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin üç açısınında cosinüs değeri dolayısı ile de üç açının da trigonometrik oranları bulunabilir.

Çözüm:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})$

$a^2 = 49 + 25 - 2.5.7.\cos(120°)$

$a^2 = 49 + 25 - 2.5.7.(-\frac{1}{2})$

$a^2 = 74 + 35$

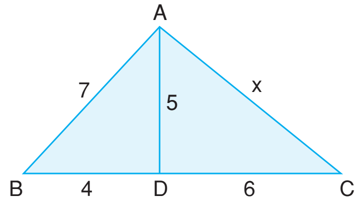
$a^2 = 109$

$a = \sqrt{109}$ br bulunur.

Uyarı

Bir üçgende iki kenarı ile bu kenarlar arasındaki açının trigonometrik oranı bilinirse üçüncü kenar uzunluğu bulunabilir.

Örnek:



ABC üçgeninde
|AB| = 7 br, |BD| = 4 br
|DC| = 6 br, |AD| = 5 br ise
|AC| = x kaç br dir?

Çözüm:

ABD üçgeninde cosinüs teoremini yazarsak,

$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2.4.7.\cos\widehat{B}$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{16+49-25}{56}$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{5}{7}$

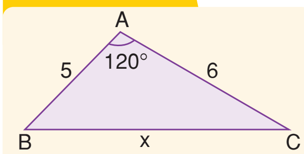
Şimdi ABC üçgeninde cosinüs teoremini yazalım.

$x^2 = 7^2 + 10^2 - 2.7.10.\cos\widehat{B}$

$x^2 = 49 + 100 - 140.\dfrac{5}{7}$

$x^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad x = 7$ br bulunur.

Sıra Sende



Şekildeki ABC üçgeninde
$m(\widehat{A}) = 120°$, |AB| = 5 br,
|AC| = 6 br ise
|BC| = x kaç br dir?

Örnek:

ABC üçgeninde
|AB| = c br, |AC| = b br, |BC| = a br ve
$a^3 + c^2.b = b^3 + c^2.a$ ise
$m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir? $(a \neq b)$

Çözüm:

$a^3 + c^2.b = b^3 + c^2.a$

$a^3 - b^3 = c^2.a - c^2.b$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = c^2(a-b)$

$a^2 + ab + b^2 = c^2$ olur.

cosinüs teoreminden

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\widehat{ACB})$ olur.

$$\begin{array}{rl} & c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\widehat{ACB}) \\ - & c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ \hline & 0 = -2ab.\cos(\widehat{ACB}) - ab \end{array}$$

$ab = -2ab.\cos(\widehat{ACB})$

$-\dfrac{1}{2} = \cos(\widehat{ACB})$ olur.

$m(\widehat{ACB}) = 120°$ bulunur.

Örnek:

ABC üçgeninde

$|BC| = 7$ br, $|AC| = 6$ br ve $|AB| = 10$ br ise

$|AC|.\cos(\widehat{ACB}) + |AB|.\cos(\widehat{ABC})$ kaçtır?

Çözüm:

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC|.|BC|.\cos(\widehat{ACB})$

$10^2 = 6^2 + 7^2 - 2.6.7.\cos(\widehat{ACB})$

$100 = 36 + 49 - 84.\cos(\widehat{ACB})$

$-\dfrac{15}{84} = \cos(\widehat{ACB})$ olur.

$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 - 2|BC|.|AB|.\cos(\widehat{ABC})$

$6^2 = 7^2 + 10^2 - 2.7.10.\cos(\widehat{ABC})$

$36 = 49 + 100 - 140.\cos(\widehat{ABC})$

$\dfrac{113}{140} = \cos(\widehat{ABC})$ olur.

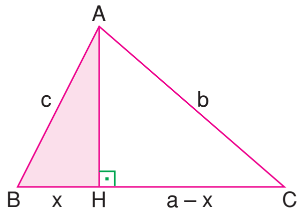
$|AC|.\cos(\widehat{ACB}) + |AB|.\cos(\widehat{ABC})$

$= 6.-\left(\dfrac{15}{84}\right) + 10.\dfrac{113}{140}$

$= -\dfrac{15}{14} + \dfrac{113}{14}$

$= \dfrac{98}{14} = 7$ bulunur.

Kenar uzunlukları a, b, c olan bir ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ çizelim.



$|BH| = x$ ve $|HC| = a - x$ yazalım.

ABH ve ACH diküçgenlerinde

$\cos B = \dfrac{x}{c}$ ve $x = c \cos B$

$\cos C = \dfrac{a-x}{b}$ ve $a - x = b.\cos C$ bulunur.

Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa

$x + (a - x) = c.\cos B + b.\cos C$ ve

$a = b\cos C + c\cos B$ bulunur.

Benzer şekilde hareketle

$b = c.\cos A + a.\cos C$ ve

$c = a.\cos B + b.\cos A$ bulunur.

Örnek

Bir ABC üçgeninde $a = 7$ br, $b = 5$ br ve $c = 3$ br ise **bu üçgenin en büyük açısı kaç derecedir?**

Çözüm

Büyük açı büyük kenar karşısında olacağından $m(\widehat{A})$ büyük açıdır.

Cosinüs teoreminden

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2.5.3.\cos A$

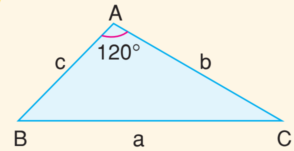
$49 = 25 + 9 - 30.\cos A$

$\cos A = \dfrac{34-49}{30}$

$= \dfrac{-15}{30} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos A = -\dfrac{1}{2}$ ise $m(\widehat{A}) = 120°$ olur.

Sıra Sende



Şekilde $m(\widehat{A}) = 120°$, $|AB| = c$, $|AC| = b$ ve $|BC| = a$ dır.

$b + c = 12$ ve

$b.c = 32$ ise

a kaç br dir?

Uyarı

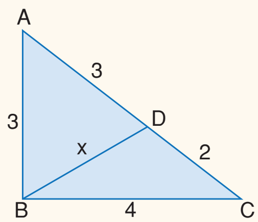
Kenar uzunlukları a, b ve c br olan bir ABC üçgeninde

$b.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{B} = a$

$a.\cos\hat{C} + c.\cos\hat{A} = b$

$b.\cos\hat{A} + a.\cos\hat{B} = c$ dir.

Örnek



Şekilde

$|AB| = 3$ br,

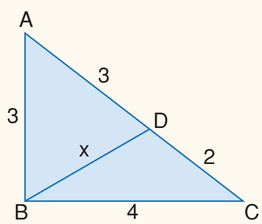
$|AD| = 3$ br,

$|DC| = 2$ br ve

$|BC| = 4$ br ise

$|BD| = x$ kaç br dir?

Çözüm



ABC üçgeninin kenarları 3, 4, 5 olduğundan, $m(\widehat{ABC}) = 90°$ olur.

$\cos\hat{A} = \frac{3}{5}$, ABD üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa,

$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\cos A$

$x^2 = 9 + 9 - 2.3.3.\frac{3}{5}$

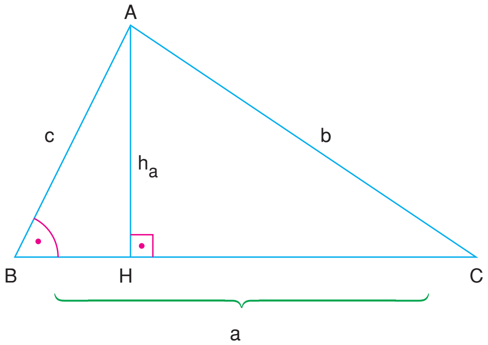
$x^2 = 18 - \frac{54}{5}$

$x^2 = \frac{36}{5}$

$x = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ br

bulunur.

ÜÇGENİN TRİGONOMETRİK ALAN FORMÜLÜ ve SİNÜS TEOREMi



ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ çizelim.

ABH dik üçgeninde

$\sin B = \frac{h_a}{c}$ ve $h_a = c.\sin B$ olur.

$A(ABC) = \frac{1}{2}a.h_a$ ifadesinde yerine yazarsak

$A(ABC) = \frac{1}{2}a.(c.\sin B)$ ve

$A(ABC) = \frac{1}{2}a.c.\sin B$ bulunur.

Benzer şekilde $A(ABC) = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}a.b.\sin C$ bulunur.

Bu üç alan formülünü ikişer ikişer eşitlersek

$\frac{1}{2}a.c \sin B = \frac{1}{2}b.c \sin A$ dan

$a \sin B = b \sin A$ ve

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ olur.

$\frac{1}{2}a.c \sin B = \frac{1}{2}a.b \sin C$ den

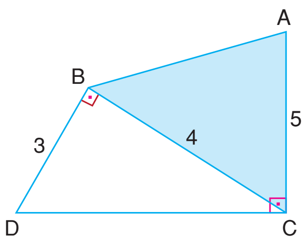
$c.\sin B = b.\sin C$ ve

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ bulunur. Bu iki sonucu birleştirirsek

$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$ elde edilir.

Bu kurala sinüs kuralı diyeceğiz.

Örnek:



Şekilde

$[BD] \perp [BC]$, $[AC] \perp [DC]$,

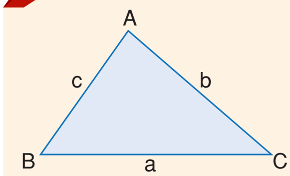
$|BD| = 3$ br,

$|BC| = 4$ br ve

$|AC| = 5$ br ise

A(ABC) kaç br^2 dir?

Uyarı

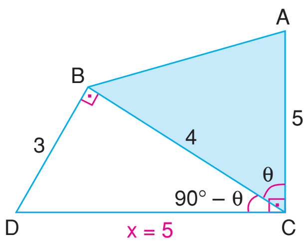


$A(ABC) = \frac{1}{2}\, a.b.\sin\widehat{C}$

$A(ABC) = \frac{1}{2}\, a.c.\sin\widehat{B}$

$A(ABC) = \frac{1}{2}\, b.c.\sin\widehat{A}$

Çözüm:



BDC üçgeninde

$|DC| = x$ dersek,

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x = 5$ br olur.

$m(\widehat{BCA}) = \theta$ dersek

$m(\widehat{DCB}) = 90° - \theta$ olur.

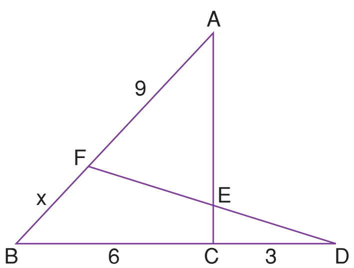
$\cos(80° - \theta) = \sin\theta$ dır.

$A(ABC) = \frac{4.5}{2}.\sin\theta$

$= 10.\cos(90° - \theta)$

$= 10.\frac{4}{5} = 8$ br^2

Örnek:



Şekilde $|AF| = 9$ br,

$|BC| = 6$ br,

$|CD| = 3$ br ve

$A(ABC) = 2.A(FBD)$ ise

$|BF| = x$ kaç br dir?

Çözüm:

$A(ABC) = \frac{1}{2}.6.(9 + x).\sin\widehat{B}$

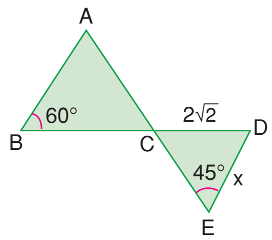
$A(BFD) = \frac{1}{2}.9.x.\sin\widehat{B}$

$A(ABC) = 2.A(BFD)$

$\frac{1}{2}.6.(9 + x).\sin\widehat{B} = 2\,\frac{1}{2}\,9.x.\sin\widehat{B}$

$27 + 3x = 9x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{2}$ br bulunur.

Örnek:



Şekilde $m(\widehat{ABD}) = 60°$,
$m(\widehat{AED}) = 45°$,
$4|AC| = 5|AB|$ ve
$|CD| = 2\sqrt{2}$ br ise
$|ED| = x$ kaç br dir?

Çözüm:

$4|AC| = 5|AB|$ ise $|AC| = 5k$ ve $|AB| = 4k$ olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = \frac{|AC|}{\sin 60°} \Rightarrow \frac{4k}{\sin\widehat{C}} = \frac{5k}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\widehat{C} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad \text{olur.}$$

CDE üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{x}{\sin\widehat{C}} = \frac{|CD|}{\sin 45°}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

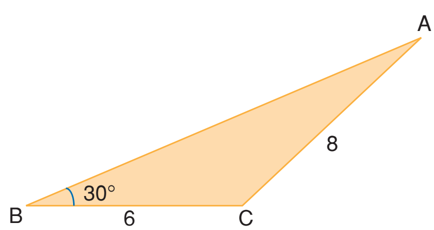
$$x = \frac{8\sqrt{3}}{5} \text{ br bulunur.}$$

Sakın cahil insanlarla laf düellosuna girme çünkü onlar her zaman haklıdır.

Ne kadar okursan oku, bilgine yakışır şekilde davranmıyorsan cahilsin.

Sadi Şirazi

Örnek:



Şekildeki ABC üçgeninde $\sin\widehat{A}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

$$\frac{6}{\sin\widehat{A}} = \frac{8}{\sin 30°} \Rightarrow \frac{6}{\sin\widehat{A}} = \frac{8}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{3}{8} \quad \text{bulunur.}$$

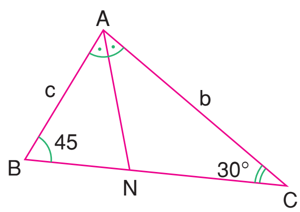
ETKİNLİK - 2

1. **Aşağıda verilen sorularda istenilenleri bulunuz.**

a) Bir ABC üçgeninde $a = 8$ br, $b = 5$ br ve $m(\widehat{C}) = 60°$ ise **A(ABC) kaç br^2 dir?**

b) Bir ABC üçgeninde bir kenar uzunluğu çevrel çemberinin yarıçapına eşit ise **bu kenarın karşısındaki açı kaç derecedir?**

c)



Şekildeki ABC üçgeninde [AN] açıortay,

$m(A\widehat{B}C) = 45°$ ve

$m(B\widehat{C}A) = 30°$ ise

$\dfrac{|BN|}{|NC|}$ **kaçtır?**

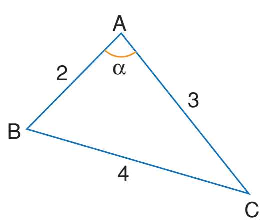
2. **Aşağıda verilen sorularda istenilenleri bulunuz.**

a) $a = \sin 40°$

$b = \tan 68°$

$c = \cos 70°$ **nin doğru sıralanışı nasıldır?**

b)



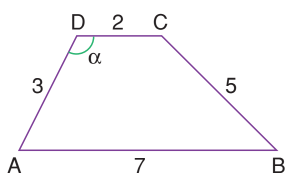
Şekildeki ABC üçgeninde

$|AB| = 2$ br, $|AC| = 3$ br, $|BC| = 4$ br ve

$m(B\widehat{A}C) = \alpha$ ise

tanα kaçtır?

c)



Şekildeki ABCD yamuğunda

$|AB| = 7$ br, $|BC| = 5$ br, $|CD| = 2$ br,

$|AD| = 3$ br ve $m(A\widehat{D}C) = \alpha$ ise

cosα kaçtır?

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI

Sıra Sende

$y = \sin 3x + \cos 2x$

fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Tanım

$f : A \to B$ fonksiyonunda $\forall x \in A$ için,

$f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir T reel sayısı varsa f fonksiyonu **periyodik fonksiyon**, T reel sayısına da **periyot** denir.

1) $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ olduğundan

$$f(x) = \sin x \Rightarrow T = 2\pi \text{ dir.}$$

$\cos x = \cos(x + 2\pi)$ olduğundan

$$f(x) = \cos x \Rightarrow T = 2\pi \text{ dir.}$$

$\tan x = \tan(x + \pi)$ olduğundan

$$f(x) = \tan x \Rightarrow T = \pi \text{ dir.}$$

$\cot x = \cot(x + \pi)$ olduğundan

$$f(x) = \cot x \Rightarrow T = \pi \text{ dir.}$$

2) $f(x) = \sin^n(ax \pm b)$

$f(x) = \cos^n(ax \pm b)$

$n \neq 0$ olmak üzere

n tek doğal sayı ise $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

n çift doğal sayı ise $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

3) $f(x) = \tan^n(ax \pm b)$

$f(x) = \cot^n(ax \pm b)$

$n \in N^+$ olmak üzere $T = \dfrac{\pi}{|a|}$ dır.

4) f ve g fonksiyonlarının periyotları T_1 ve T_2 ise

$f \pm g$ fonksiyonunun periyotu OKEK(T_1, T_2) dir.

Örnek:

$f(x) = \sin^2(3x + 5)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \frac{\pi}{3}$ bulunur.

$f(x) = \cos^3\left(-\frac{\pi}{4} + 2\right)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = 8\pi$ bulunur.

$f(x) = \tan^5\left(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$ bulunur.

$f(x) = \cot^4(2x + 3)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Sıra Sende

$y = \cos\frac{x}{4}$ fonksiyonunun **periyodunu bulunuz.**

Örnek:

$f(x) = 2\sin^3(4x + 5) - 3\cos^4\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)$

fonksiyonunun periyodunu bulalım.

$2\sin^3(4x + 5)$ in periyotu $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$3\cos^4\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)$ in periyodu $T_2 = \frac{\pi}{6}$

Buna göre f(x) fonksiyonunun periyodu

$T = \text{OKEK}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

1) $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği: Periyotu 2π olduğundan $[0, 2\pi]$ aralığında inceleyelim. Buna göre x'e $[0, 2\pi]$ aralığında bazı değerlere karşılık $y = \sin x$ değerleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

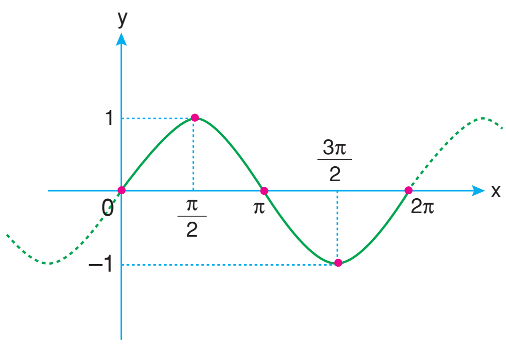
Sıra Sende

y = 2cosx fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	1	0	– 1	0

Bu tabloya göre grafik aşağıdaki gibidir.



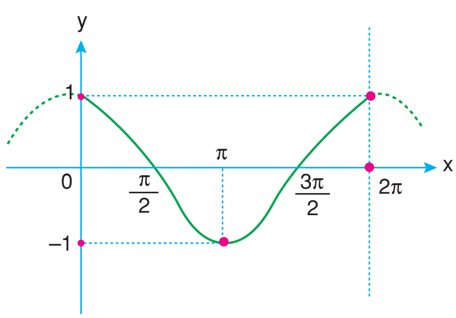
2) y = cosx fonksiyonunun grafiği : Periyotu 2π olduğundan $[0, 2\pi]$ aralığında inceleyelim. Tablo düzenlenirse

$f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$

$f(x) = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1	0	– 1	0	1

Bu tabloya göre grafik aşağıdaki gibidir.



Örnek:

$y = f(x) = 3\sin x - 1$

fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığının grafiğini çiziniz.

Sıra Sende

$y = 2\cos x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

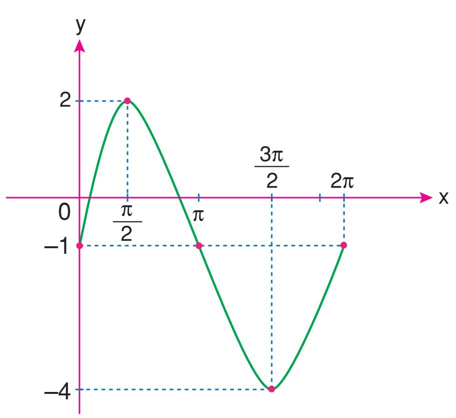
Önce tablo yapalım.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	1	0	–1	0
3sinx	0	3	0	–3	0
y =3sinx – 1	–1	2	–1	–4	–1

Bulunan noktalar (x, y) için

$(0, -1), \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, -4\right), (2\pi, -1)$ dir.

Bundan koordinat düzlemine geçersek



$y = f(x) = 3\sin x - 1$ grafiği şekildeki gibi olur.

Uyarı

Ters trigonometrik bir fonksiyonda y nin, trigonometrik oranı x olan açının (yayın) ölçüsü olduğuna dikkat ediniz.

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1. Arcsinüs Fonsiyonu

sin: $R \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu birebir ve örten değildir. Ancak tanım kümesi R nin bir alt kümesi olan $[-\pi / 2, \pi / 2]$ aralığı olarak seçersek

$\sin^{-1}$: $[-\pi / 2, \pi / 2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlı sinüs fonksiyonu 1 – 1 ve örten olup, ters fonksiyonu vardır. Buna göre, sinüs foksiyonun tersi;

$\sin^{-1}$: $[-1, 1] \to [-\pi / 2, \pi / 2]$, $f^{-1}(x) = \text{Arc} \sin x$ tir.

Uyarı

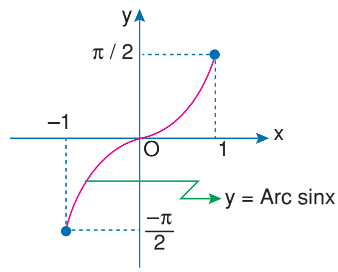
$f(a) = b$ ise

$a = f^{-1}(b)$ olduğunu hatırlayınız.

Kısaca;

$y = \text{arc} \sin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$x \in [-1, 1]$ ve $y \in [-\pi / 2, \pi / 2]$



Uyarı

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ iken

$\alpha = \text{arc} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

2. Arckosinüs Fonsiyonu

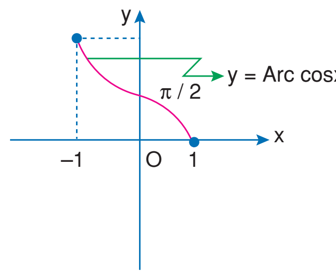
cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ biçiminde tanımlı kosinüs fonksiyonu 1 – 1 ve örten olup ters fonksiyonu vardır ve

$\cos^{-1}$: $[-1, 1] \to [0, \pi]$, $f^{-1}(x) = \text{Arc} \cos x$ tir.

Kısaca

$y = \text{arc} \cos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$x \in [-1, 1]$ ve $y \in [0, \pi]$



Uyarı

$\tan\beta = \sqrt{3}$ ise

$\beta = \text{arc} \tan \sqrt{3}$ dür.

3. Arctanjant Fonsiyonu

tan: $[-\pi / 2, \pi / 2] \to R$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonu, 1 – 1 ve örten olup ters fonksiyonu;

$\tan^{-1}$: $R \to [-\pi / 2, \pi / 2]$, $f^{-1}(x) = \text{Arc} \tan x$ tir.

Uyarı

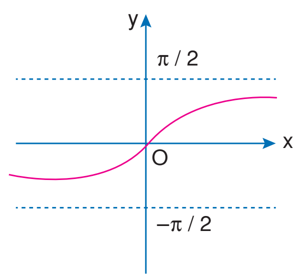
$\text{arc} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$ ise

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\alpha$ dır.

Kısaca

$y = \text{arc} \tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$x \in R$ ve $y \in (0, \pi)$



Uyarı

$\text{arc} \cot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \beta$ ise

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \cot\beta$ dır.

4. Arckotanjant Fonsiyonu

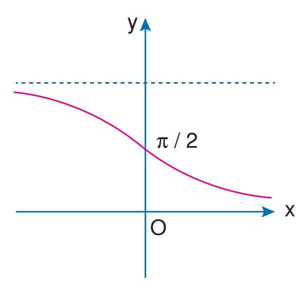
cotg: $(0, \pi) \to R$, $f(x) = \text{cotg}\, x$ fonksiyonu 1 – 1 ve örten olup ters fonksiyonu,

cotg^{-1}: $R \to (0, \pi)$, $f^{-1}(x) = \text{Arc cotg}\, x$ tir.

Kısaca

$y = \text{arc cotg} x \Leftrightarrow x = \text{cotg} y$

$x \in R$ ve $y \in (0, \pi)$



Örnek:

$y = \text{arc sin}\,\frac{1}{2}$ ise **y nin değeri nedir?**

Çözüm:

$\text{arc sin}\,\frac{1}{2} = y$ ise

$\frac{1}{2} = \sin y$ dir.

değeri $\frac{1}{2}$ olan iki açı vardır.

$y = 30°$ veya $y = 150°$ dir.

Örnek:

$y = \text{arc tan}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ise **y kaçtır?**

Çözüm:

$y = \text{arc tan}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ise

$\tan y = \sin\frac{\pi}{2}$

$\tan y = 1$ ve

$y = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

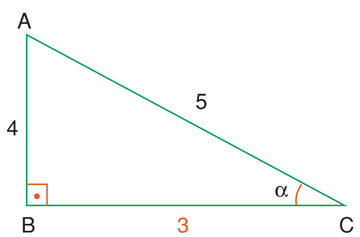
Örnek:

$y = \tan\left(\text{arc sin}\,\frac{4}{5}\right)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm:

$\text{arc sin}\,\frac{4}{5} = \alpha$ olsun, $y = \tan\alpha$ olur ve $\frac{4}{5} = \sin\alpha$ olur.

Taslak diküçgende oranları yerleştirilip üçüncü kenarı bulalım.



$5^2 = 4^2 + |BC|^2$ ve

$|BC| = 3$ br olur.

$\tan\alpha = \frac{|AB|}{|BC|}$ den

$\tan\alpha = \frac{4}{3}$ bulunur.

Örnek

$\cos\left(\text{arc cot}\,\frac{1}{7}\right)$ **değeri kaçtır?**

Çözüm

$\text{arc cot}\,\frac{1}{7} = \alpha$ dersek

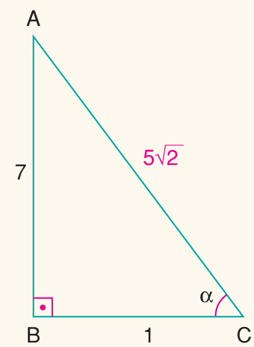
$\cos\left(\text{arc cot}\,\frac{1}{7}\right)$ de

$\cos\left(\text{arc cot}\,\frac{1}{7}\right) = \cos\alpha$ olur.

$\text{arc cot}\,\frac{1}{7} = \alpha$ ise

$\frac{1}{7} = \cot\alpha$ olur.

taslak üçgen çizersek



üçüncü kenarı $|AC|^2 = 7^2 + 1^2$

$= 50$ ve

$|AC| = 5\sqrt{2}$ br olur.

$\cos\alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ bulunur.

Sıra Sende

$y = \text{arc tan}\,(\cos 180°)$

değeri nedir?

ETKİNLİK - 3

1. **Aşağıda verilen trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bulunuz.**

   a) $\sin 3x$ b) $\cos 4x$ c) $\tan 2x$ d) $\sin 2x + \cos 3x$ e) $\tan 3x + \cos 2x$

2. **Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.**

   a) $2\sin x$ b) $2\sin x + 3$ c) $\cos 2x$ d) $\cos 2x - 2$

3. $y = \cos\left(\text{anc}\sin\dfrac{5}{3}\right) =$ **değeri nedir?**

4. $f(x) = 2\sin^3(3x + 5°)$ **nin periyodu kaçtır?**

5. $f(x) = \sin(5x + 5°) + \cos^2(2x + 15°)$ **nin periyodu kaçtır?**

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. **225 derece kaç radyandır?**

A) $\frac{9\pi}{4}$ B) $\frac{7\pi}{5}$ C) $\frac{7\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{16}$

2. $\sec^2\alpha - \sec\alpha.\cos\alpha$

işleminin sadeleşmiş hali nedir?

A) $\tan^2\alpha$ B) $\cot^2\alpha$ C) $\sin\alpha$ D) $\cos^2\alpha$ E) $\text{cosec}\alpha$

3. $\tan^4\alpha - \sec^4\alpha$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

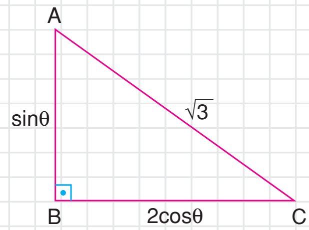
A) $2\sin^2\alpha$ B) $1 - 2\cos^2\alpha$ C) $1 - \cot\alpha$ D) $1 - \tan\alpha$ E) $1 - 2\sec^2\alpha$

4. $\cos x = \frac{1}{3}$ ise $2\sin x + \tan x$

değeri kaçtır?

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$ D) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

5.



Şekildeki ABC diküçgeninde
$|AB| = \sin\theta$,
$|BC| = 2\cos\theta$ ve
$|AC| = \sqrt{3}$ br ise
$\tan\theta$ kaçtır?

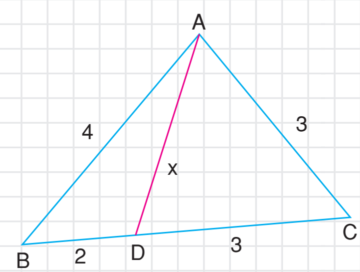
A) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

6. $\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$

işleminin sonucu nedir?

A) $-\sin\alpha$ B) $-\cos\alpha$ C) 0 D) $\sin\alpha$ E) $\sin\alpha\cos\alpha$

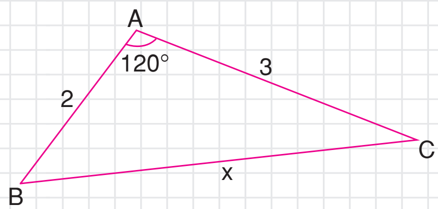
7.



Şekildeki ABC üçgeninde
$|AB| = 4$ br,
$|AC| = 3$ br,
$|BD| = 2$ br ve
$|DC| = 3$ br ise
$|AD| = x$ kaç br dir?

A) $2\sqrt{5}$ B) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

8.



Şekildeki ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) = 120°$

$|AB| = 2$br ve $|AC| = 3$br ise

$|BC| = x$ kaç br dir?

A) $\sqrt{5}$ B) 4 C) $\sqrt{17}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{19}$

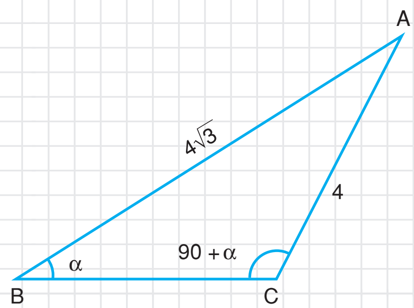
9. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c arasında

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{a+b}{c}$ bağıntısı varsa

$m(\widehat{BAC})$ **kaç derecedir?**

A) 60 B) 75 C) 90 D) 120 E) 150

10.



Şekildeki ABC üçgeninde

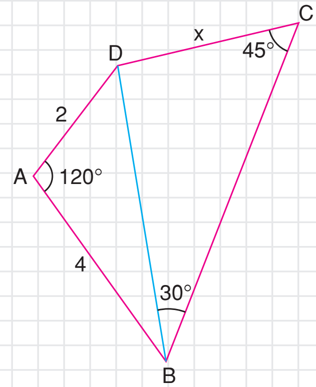
$|AB| = 4\sqrt{3}$ br, $|AC| = 4$ br

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BCA}) = 90° + \alpha$ ise

α kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

11.



Şekildeki ABCD dörtgeninde

$m(\widehat{BAD}) = 120°$, $m(\widehat{DBC}) = 30°$

$m(\widehat{BCD}) = 45°$, $|AD| = 2$ br ve

$|AB| = 4$ br ise **$|CD| = x$ kaç br dir?**

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\sqrt{15}$ D) 4 E) $3\sqrt{3}$

12. sin(arc cot2) değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{10}$

ÇÖZÜMLER

1. $\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{225}{180}$ ise $R = \dfrac{5\pi}{4}$ radyan bulunur.

YANIT D

2. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ dır. Yerine yazarsak

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}.\cos\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha \text{ olur.}$$

YANIT A

3. $\tan^4\alpha - \sec^4\alpha = (\tan^2\alpha - \sec^2\alpha)(\tan^2\alpha + \sec^2\alpha)$

$$= \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right).\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha}\right).\left(\frac{\sin^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha}\right)$$

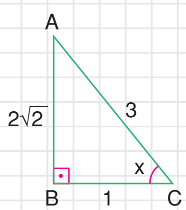
$$= \frac{-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.\left(\frac{1-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$= -\left(\frac{2-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{\cos^2\alpha - 2}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha} = 1 - \frac{2}{\cos^2\alpha} = 1 - 2\sec^2\alpha \text{ olur.}$$

YANIT E

4.



ABC diküçgeni çizilir.

$m(\widehat{C}) = x$ denirse

$|BC| = 1$ ve $|AC| = 3$ yazılırsa

pisagor bağıntısından

$|AB| = 2\sqrt{2}$ bulunur.

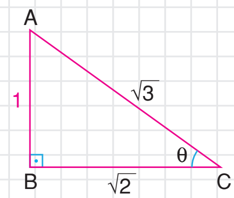
Buna göre $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ve $\tan x = \dfrac{2\sqrt{2}}{1}$ olur.

Bu değerler yerine yazılır hesaplanırsa

$2\sin x + \tan x = 2.\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{1} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ olur.

YANIT D

5.



ABC diküçgeninde pisagor bağıntısı yazılırsa

$\sqrt{3}^2 = (\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2$

$3 = \sin^2\theta + 4\cos^2\theta$

$3 = 1 - \cos^2\theta + 4\cos^2\theta$ ve

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ olur.

ABC taslak üçgenini çizersek

$m(\widehat{ACB}) = \theta$ dersek

$|BC| = \sqrt{2}$ br ve

$|AC| = \sqrt{3}$ br olur.

$\sqrt{3}^2 = |AB|^2 + \sqrt{2}^2$ ve $|AB| = 1$ br bulunur.

$\tan\theta = \dfrac{|AB|}{|BC|}$ den $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

YANIT B

6. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ve

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ dır. Bu değerler yerine yazılırsa

$\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$

$= \sin\alpha - (-\cos\alpha) - \sin\alpha + \cos\alpha$

$= \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha = 0$ olur.

YANIT C

7. ABC üçgeninde üç kenar uzunluğuda bilindiğine göre üç açınında cosinüs değeri bulunabilir.

C açısı hem ABC hemde ADC üçgenine ait olduğu için C açısının cosinüsünü bulalım.

$4^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos\widehat{C}$

$16 - 9 - 25 = -30\cos\widehat{C}$

$\dfrac{-18}{-30} = \cos\widehat{C}$

$\widehat{C} = \dfrac{3}{5}$ olur.

ADC üçgeninde cos teoremini yazarsak

$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\cos\widehat{C}$

$x^2 = 9 + 9 - 2.3.3.\dfrac{3}{5} = 18 - \dfrac{54}{5}$

$x^2 = \dfrac{36}{5}$ ve

$x = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ br bulunur.

YANIT E